Nachklausur zur Vorlesung THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2015

Prof. Dr. Norbert Dragon

01.10.2015, 11:00-13:30 Uhr — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Name:		#	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Σ
Matrikelnr.:		Pkte								

[K0] *Kurzfragen* **$[1+1+1+1+1+1=6$ Punkte]**

Alle Fragen lassen sich in einem Satz oder mit einer Formel beantworten.

(a) Was besagt die Poisson-Gleichung?

(b) Was können Sie qualitativ zur Fouriertransformation einer konstanten Funkltion $g(x) = 1$ sagen?

(c) Wie ist das magnetische Dipolmoment definiert?

(d) Was ist die Coulombeichung?

(e) Was gibt der Poynting-Vektor des elektromagnetischen Feldes an?

(f) Wie ist der Maxwellsche Feldstärketensor F_{mn} durch das Viererpotential A_m gegeben?

[K1] *Quadrupoltensor* **$[2+4=6$ Punkte]**

Der Quadrupoltensor einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ hat die Form $Q^{ij} = \displaystyle\int \mathrm{d}^3x\,\rho(\vec{x})(3x^ix^j - \delta^{ij}\vec{x}^2)$.

(a) Unter welchen Bedingungen ist der Quadrupoltensor von der Wahl des Koordinatenursprungs unabhängig?

(b) Welche Aussagen können getroffen werden über die Komponenten des Quadrupoltensors für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}) = \rho(r)$, und welche für eine axialsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}) = \rho(r_\perp, z)$? Hiebei sind $r = |\vec{x}|$ und $r_\perp$ der Abstand von der z-Achse, d.h. von der Symmetrieachse.

[K2] *Integralsätze* **$[2+3+1=6$ Punkte]**

In einer Kugelschale befinde sich zwischen den Radien r_1 und r_2, $r_1 < r_2$, eine homogene Raumladungsdichte ρ.
Hinweis: der Gradient in Kugelkoordinaten ist $\mathrm{grad} = \vec{e}_r\partial_r + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi$.

(a) Das elektrische Potential $\phi(\vec{x}) = \phi(r)$ ist radialsymmetrisch. Folgern Sie daraus, dass das elektrische Feld von der Form $\vec{E}(\vec{x}) = E(r)\vec{e}_r$ ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauss'schen Gesetzes das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ im ganzen Raum, also für die Fälle $r < r_1$, $r_1 < r < r_2$ und $r_2 < r$.

(c) Skizzieren Sie $E(r)$ über dem Abstand r.

[K3] *Fouriertransformation* **$[1+1+2=4$ Punkte]**

Berechnen Sie die Fouriertransformation $\tilde{g}(\vec{k}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\,g(\vec{x})$ der Funktion

$$g(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-|\vec{x}|^2}\,.$$

(a) Wählen Sie die z-Achse in Richtung von $\vec{k}$ und drücken Sie das Skalarprodukt im Exponenten in Kugelkoordinaten aus. Die Integration über φ ist nun ganz einfach.

(b) Die Integration über $\cos\theta$ lässt sich nun elementar ausführen.

(c) Führen Sie die abschließende Integration über r aus. *Hinweis*: $\int_{-\infty}^{\infty} r\mathrm{d}r\exp(-(r+\mathrm{i}k/2)^2) = \frac{k}{2\mathrm{i}}\sqrt{\pi}$.

[K4] *Residuensatz* **$[2+2=4$ Punkte]**

Betrachten Sie das Integral $\displaystyle\oint_\Gamma \mathrm{d}z\,\frac{1}{z^2 - \mathrm{i}z + 1}$, wobei Γ der im Gegenzeigersinn durchlaufene Einheitskreis sei, parametrisiert als $\theta \mapsto z(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(a) Berechnen Sie dieses Integral mit dem Residuensatz. Geben Sie dazu an, wo die Pole des Integranden liegen und welchen Wert das Residuum des Pols hat, der im Einheitskreis liegt.

(b) Zeigen Sie, dass dieses komplexe Wegintegral dem folgenden reellen Integral $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\frac{2\mathrm{i}\cos\theta - 1}{4\cos^2\theta + 1}$ gleich ist. *Hinweis*: Am Schluss Zähler und Nenner geeignet erweitern

[K5] *Ableitungen* **[3 Punkte]**

Zeigen Sie in Indexnotation $\big((\mathrm{rot}\vec{A}) \times \vec{A}\big)^i = \partial_k\big(A^iA^k - \frac{1}{2}\delta^{ik}\vec{A}^2\big) - A^i\mathrm{div}\vec{A}$.
Hinweis: Um die Gleichheit zu zeigen, empfiehlt es sich, beide Seiten in Indexnotation auszuwerten und die Produktregel anzuwenden. Es ist $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

[K6] *Elektromagnetisches Feld* **$[2+2=4$ Punkte]**

Im Vakuum gelten die Maxwell-Gleichungen $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, $\mathrm{rot}\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0$ und $\mathrm{rot}\vec{B} - \partial_t\vec{E} = 0$.

(a) Folgern Sie daraus, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ jeweils komponentenweise die Wellengleichungen $\Box C^i = 0$ erfüllen, wobei $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 = \partial_t^2 - \mathrm{div\,grad}$ und $\vec{C} \in \{\vec{E}, \vec{B}\}$ ist. *Hinweis*: $\mathrm{rot\,rot} = \mathrm{grad\,div} - \Delta$.

(b) Welcher Bedingung müssen die Frequenz ω und der Wellenvektor $\vec{k}$ genügen, damit die ebene Welle

$$\vec{\phi}(t, \vec{x}) = \Re\mathrm{e}\Big(a_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}\Big)$$

die Wellengleichung $\Box\phi = 0$ erfüllt? Hierbei bezeichnet $\Re\mathrm{e}$ den Realteil.